

文章编号: 1009-3087(2014)05-0081-07

一类带初始输入的线性循环终止性分析

李 轶¹ 李传璨¹ 吴文渊²

(1. 重庆邮电大学 计算机科学与技术学院, 重庆 400065;

2. 中国科学院 重庆绿色智能技术研究院 自动推理与认知重庆市重点实验室, 重庆 400714)

摘 要: 针对带初始输入的 2 维齐次线性循环的终止性问题进行研究。通过分析该类循环所有非终止点组成集合(即 NT 集)的性质,将该类循环 NT 集的构造问题转化为一类非线性优化求解问题,并给出了此类优化问题的数学模型。最终,通过验证该类循环的初始输入是否位于所构造的 NT 集合内,判定了带初始输入的 2 维齐次线性循环的终止性,并建立了用来完备判定该类循环终止性的算法。

关键词: 可信软件; 循环终止性; 最优化问题; QEPCAD

中图分类号: TP311.5

文献标志码: A

Termination Analysis of a Class of Initialized Linear Loops

LI Yi¹ LI Chuancan¹ WU Wenyuan²

(1. College of Computer Sci. and Technol., Chongqing Univ. of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China;

2. Chongqing Key Lab. of Automated Reasoning and Cognition, CIGIT, CAS, Chongqing 400714, China)

Abstract: The termination of the initialized two variable homogeneous linear loops was studied. By analyzing the property of the set NT composed of all nonterminating points, the problem about the construction of NT was converted to a class of nonlinear optimization problem. More importantly, by verifying whether or not the initial input of such loops lies in set NT , the termination of the initialized two variable homogeneous linear loops can be checked completely.

Key words: trustworthy software; loop termination; optimization problem; QEPCAD

随着计算机体型越来越小,计算性能越来越高,在信息爆炸的 21 世纪,计算机作为一种信息处理工具已快速渗入人们生活中的方方面面。从电子手表中的时钟部件到火箭、太空站中的控制系统,人类无时无刻不享受着计算机给生活、工作带来的方便快捷。然而作为指挥计算机工作的计算机程序是十分容易出现设计错误的,不难想象因软件错误而导致的飞机坠毁、高铁追尾等灾难性后果。那么如何开发出可靠的软件,即保证软件的正确性,对程序设计者来说是一个巨大的挑战。而作为保证软件正确性的一个重要组成部分,验证程序是否终止其重要性自然不言而喻。

程序终止性判定问题可归约于“停机问题”,即在有限的时间内判断给出的程序是否会永远执行下

去^[1]。判定程序终止性的主要方法是构造一个位于所有程序状态与良基(well-founded)集合之间的映射关系,即构造秩函数(ranking function),来证明该程序是可终止的。那么如何寻找给定循环的秩函数便是该方法需要解决的一个核心问题。杨路、夏壁灿等^[2]将寻找一类循环秩函数问题归约为半代数系统求解,并结合求解工具 DISCOVERER 来构造此类循环的秩函数。同时,如何找出给定循环的秩函数,在文献[3-8]中也被广泛地研究。

合成秩函数的方法几乎对所有类型的 while 循环都适用,但因函数映射的表达式几乎是无穷的,故可能无法在有限的时间内通过计算来合成相应的秩函数,即此方法对于验证循环终止性是不完备的。有别于秩函数方法,Tiwari^[9]指出一类简单线性循环

收稿日期: 2014-02-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61103110); 重庆市科技攻关重点项目(cstc2012ggB40004)

作者简介: 李 轶(1980—),男,副研究员,博士。研究方向: 符号计算; 程序验证。

http://jsuese.scu.edu.cn

程序在实数域上的终止性是可判定的。Tiwari 的研究结果给循环终止性的研究指明了新的方向。Braverman^[10]进一步证明了一类线性循环程序在整数环上的终止性是可判定的。杨路、夏壁灿等^[11]基于符号计算方法,建立了此类循环程序的精确符号判定算法。此外,在 Tiwari 和 Braverman 研究的基础上,夏壁灿等^[12]提出了一种相对完备的算法用来判定一类带有非线性循环条件的线性赋值循环的终止性。陈敬敏^[13]利用周期轨理论给出了在确定条件下非线性单重循环程序不终止的充分必要条件,并进一步建立了当循环条件为有限个互不相交的闭凸集时线性循环的终止性判定方法。

除此之外,文献[14-19]探索了部分程序的终止性问题。如 Bradley、Manna 等^[14]通过将程序抽象为一棵有限差分树展示了相应的合理但并不完备的算法用来证明一种多路径多项式程序的终止性。文献[15]中提出了一种递归算法用来判定一类线性程序的终止性。对于终止性验证, Cook 等^[16-17]分别展现了一种可以自动生成反例的抽象求精算法和介绍了著名的程序验证工具 TERMINATION。通过验证循环的初始输入是否位于发散区域(region of guaranteed divergence), Babic、Cook 等^[18]提出不完备的算法用来验证一类非线性赋值循环的终止性。Ben-Amram^[19]将秩函数思想与尺寸改变终止性(size-change termination)方法结合用于判定一类程序的终止性。

实际上,按照所研究的循环是否拥有具体的初始输入,当前国内外对于循环终止性的研究主要分为2大类:1)未初始化循环(未指定初始输入)的终止性分析。即在整个欧氏空间中判断是否存在一个点使得所给循环不终止。本质上,未初始化循环的终止性分析等同于判断所给循环所有非终止输入组成的集合,即非终止点集(简记为 NT 集),是否存在;2)初始化循环(带初始输入)的终止性分析。即这类循环带有初始输入。相较于1),判定初始化循环的终止性,等价于判定所给循环在具体初始输入下是否可终止。因此,为判定某类初始化循环的终止性,一个朴素的想法是:如果能够构造出这类循环在不带初始输入时的 NT 集,那么这类初始化循环的终止性判定就等价于检测所给的初始输入是否位于 NT 集内。

综上所述,如果能够构造某类循环在不带初始输入时的 NT 集,即找出它的所有非终止点的集合,那么该类循环在未初始化或初始化情形下的终止性

便是显而易见的。

在现有针对线性循环终止性分析的研究中,都仅仅考虑了不带初始输入的线性循环,而没有涉及到带有初始输入的线性循环终止性分析^[9-10,13]。而在现实的程序设计中往往需要判断一个循环程序是否在给出的初始输入下不终止,作者主要针对带初始输入的线性循环程序终止性进行研究。对一个给定的初始化2维齐次线性循环,通过将2维齐次线性循环 NT 集的构造问题转换为一类非线性优化求解问题,严格刻画了使得该类循环不终止的所有初始输入的集合,从而完备地解决了此类循环在带有初始输入情形下的终止性问题。

1 2 维齐次线性循环

1.1 2 维齐次线性循环的相关概念

定义1 称含有2个程序变量的齐次线性循环为2维齐次线性循环(简称为循环 L2),其循环具体形式如下:

$$L2: \text{while}(Bx > 0) \{x := Ax\}.$$

A 、 B 分别为 2×2 阶方阵和 $m \times 2$ 阶矩阵,其中, $m \in \mathbb{Z}$ $x = \{x_1, x_2\}$ 语句 $x := Ax$ 表示循环变量 x_1 、 x_2 被同时赋值。

上述 L2 是一个不带初始输入的循环程序,而下列的 IL2 则是带初始输入的循环:

$$IL2: x := x_0; \text{while}(Bx > 0) \{x := Ax\}.$$

为研究 IL2 的终止性问题,将沿上述的朴素思想:先构造无初始输入的循环 L2 的不可终止点集合 NT,然后,判定 IL2 中的初始输入 x_0 是否落在 NT 集合中。若 x_0 落在 NT 集合中,则表明 IL2 是不可终止的;否则,IL2 是可以终止的。为此,下面给出了各类集合的定义及其性质。

定义2 定义 Ω 为所有能够满足 L2 循环条件的点组成的集合:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2: Bx > 0\}.$$

$Bx > 0$ 是 L2 的循环条件。

显然,当且仅当 L2 的初始输入为 Ω 集合中的点, L2 循环体内的赋值语句才能够执行。此外,在2维平面中(\mathbb{R}^2),如果 $\Omega \neq \emptyset$, Ω 集合的几何形状即为由2条起点位于原点的射线夹成的扇形区域且该扇形的圆心角 α 满足 $0 < \alpha \leq \pi$ 。同时,记 $\bar{\Omega}$ 为 Ω 的补集,即 $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^2 - \Omega$ 。显然,因集合 $\bar{\Omega}$ 中的点都不满足循环条件 $Bx > 0$,故 $\bar{\Omega}$ 中的点都是终止点,即循环在这些点上都是可终止的。相应的,不可终止点的集合定义如下:

定义 3 所有使循环不终止的点组成的集合为非终止点集, 记为集合 NT 。对于循环 $L2$, 如果 $NT \neq \emptyset$ 那么显然有:

$$NT = \{x \in \mathbb{R}^2: Bx > 0 \wedge BAx > 0, BA^2x > 0, \dots, BA^i x > 0, \dots\}。$$

同时, 定义 $T = \mathbb{R}^2 - NT$ 作为循环 $L2$ 非终止点集合 NT 的补集, 显然集合 T 是由所有使 $L2$ 循环终止的点组成的集合。

在文献 [9] 中, Tiwari 给出了线性循环 NT 集的一些性质, 显然这些性质对循环 $L2$ 的 NT 集同样适用。

性质 1 循环 $L2$ 的 NT 集合具有如下性质:

1) $NT \subseteq \Omega$ 。

2) NT 为一个关于矩阵 A - 不变的集合, 即 A - 不变集, 即 $\forall v \in NT, Av \in NT$ 。

3) NT 为一个凸锥。

通过 NT 集合的定义可以很容易的验证上述性质的正确性。同时, 和集合 Ω 一样, 在 \mathbb{R}^2 中, 如果 $NT \neq \emptyset$, NT 的几何形状为 1 个顶点位于坐标原点的扇形, 但需注意当该扇形的 2 条边界射线重合时, 区域 NT 即退化为起点位于原点的一条射线。因此, 区域 NT 的圆心角 β 满足 $0 \leq \beta \leq \pi$ 。

通过上述 NT 集合的定义及性质分析, 可以得出 NT 与集合 Ω 中 A - 不变子集的一些关系, 即引理 1。

引理 1 NT 是 Ω 中最大的 A - 不变子集。即对集合 Ω 中任意 A - 不变子集 δ , 都有 $\delta \subseteq NT$ 。

证明: 此引理的证明是简单的。据 A - 不变集的定义可知, $\forall v \in \delta$ 满足 $Av \in \delta$, 这就意味着 δ 中的任意一点经过矩阵 A 作用后得到的新点仍然位于集合 δ 中。又知 $\delta \subseteq \Omega$, 即 δ 中的任意点都满足 $L2$ 的循环条件。那么显然集合 δ 中的所有点都是非终止点, 即 $\delta \subseteq NT$ 。因此, 对集合 Ω 中任意 A - 不变子集 δ , 都有 $\delta \subseteq NT$ 。故 NT 是 Ω 中最大的 A - 不变子集。

在此, 按 NT 集合是否包含其边界及其在 \mathbb{R}^2 中的几何形状, 将 NT 集所有可能的分布分为 4 种情况。为了方便起见, 当 NT 在 \mathbb{R}^2 中呈扇形时, 分别记其 2 条边界上所有点 (除 0 点外) 组成的集合为 τ_1 、 τ_2 。则所有可能的 NT 分布如下:

1) NT 为一条射线。

2) NT 为扇形, 且 $\tau_1 \subset NT, \tau_2 \subset NT$ 。

3) NT 为扇形, 且 $\tau_1 \subset T, \tau_2 \subset T$ 。

4) NT 为扇形, 且 $\tau_1 \subset T, \tau_2 \subset T$ 。

其中, 情况 2)、3)、4) 分别描述了 NT 为扇形且包含 2 条扇形边界, 仅包含其中任意 1 条边界和 2 条

边界都不包括的 3 种情况。

根据 NT 集合的分类, 如果 $NT \neq \emptyset$, 可以分别用 $a^T x = 0 \wedge Bx > 0$ 和 $a^T x > 0 \wedge b^T x > 0 \wedge x \neq 0$ 来表示 NT 集的 4 种分布情况, 其中 $a^T = \{a_1, a_2\}$, $b^T = \{b_1, b_2\}$, $\triangleright \in \{>, \geq\}$ 。因此, 根据 NT 集合的性质可以构造出一组完备的量词公式用来判断循环 $L2$ 的终止性, 即定理 1:

定理 1 循环 $L2$ 是不终止的当且仅当下述量词公式有一个为真:

$$\exists a, b. [\exists x. \varphi_1(a, b, x) \wedge \forall x. (\varphi_1(a, b, x) \Rightarrow (Bx > 0 \wedge \varphi_1(a, b, Ax)))] \quad (1)$$

其中 $\varphi_1(a, b, x)$ 表示 $a^T x > 0 \wedge b^T x > 0$ 。

$$\exists a, b. [\exists x. \varphi_2(a, b, x) \wedge \forall x. (\varphi_2(a, b, x) \Rightarrow (Bx > 0 \wedge \varphi_2(a, b, Ax)))] \quad (2)$$

其中 $\varphi_2(a, b, x)$ 表示 $a^T x \geq 0 \wedge b^T x > 0$ 。

$$\exists a, b. [\exists x. \varphi_3(a, b, x) \wedge \forall x. (\varphi_3(a, b, x) \Rightarrow (Bx > 0 \wedge \varphi_3(a, b, Ax)))] \quad (3)$$

其中 $\varphi_3(a, b, x)$ 表示 $a^T x \geq 0 \wedge b^T x \geq 0 \wedge x \neq 0$ 。

$$\exists a. [\exists x. \varphi_4(a, x) \wedge \forall x. (\varphi_4(a, x) \Rightarrow \varphi_4(a, Ax))] \quad (4)$$

其中 $\varphi_4(a, x)$ 表示 $a^T x = 0 \wedge Bx > 0$ 。

证明: 充分性是显然的。依据引理 1 可知, 若要证其充分性, 只需证若式 (1) ~ (4) 中任意一个成立, 则在循环条件 Ω 内存在非空 A - 不变集即可。令 η 为 $\varphi_i(a, b, x)$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) 或 $\varphi_4(a, x)$ 的解集。那么 $\exists x. \varphi_i(a, b, x)$ 和 $\exists x. \varphi_4(a, x)$ 确保 $\eta \neq \emptyset$, $\forall x. (\varphi_i(a, b, x) \Rightarrow (Bx > 0 \wedge \varphi_i(a, b, Ax)))$ 和 $\forall x. (\varphi_4(a, x) \Rightarrow \varphi_4(a, Ax))$ 成立, 意味着解集 η 为 Ω 内的 A - 不变集。綜上述, 可知若式 (1) ~ (4) 任意一个成立, 则 Ω 内都存在非空 A - 不变集 η 。

为了证明必要性, 则需要证明若式 (1) ~ (4) 都不成立, 则 $NT = \emptyset$ 。通过之前对 NT 分布的分类可知, 在 \mathbb{R}^2 中, 若 $NT \neq \emptyset$, 则 NT 只能为不含边界、含 1 条边界和含 2 条边界的扇形或 1 条射线。若式 (1) 不为真, 可知位于 Ω 内为不含 2 条边界扇形的 A - 不变集 η 不存在。那么依据引理 1, 可知集合 NT 不会为不含 2 条边界的扇形。同理可知, 若式 (2) ~ (4) 都不成立, 那么 NT 亦不会为不含 1 条边界或含 2 条边界的扇形或 1 条射线。故若式 (1) ~ (4) 都不成立, 则 $NT = \emptyset$, 循环 $L2$ 终止。

通过定理 1 中的量词公式, 不难看出, 如果存在 a, b 满足上述式 (1) ~ (4) 中的任意一个, 那么相应的 η 必定存在且非空 (η 为 $\varphi_i(a, b, x)$ ($i \in \{1, 2, 3\}$))

或 $\varphi_4(a, x)$ 的解集)。此时 $\varphi_i(a, b, x)$ 在 \mathbb{R}^2 中体现为一个顶点位于原点的扇形,且该扇形内的所有点都是 A -不变的。为方便,称 $\varphi_i(a, b, x)$ 在 \mathbb{R}^2 中对应的扇形为 A -不变扇形。同时,通过定理 1 的必要性,亦知如果 Ω 内存在 A -不变集,那么量词式 (1) ~ (4) 中至少有一个成立。

为了得到满足式 (1) ~ (4) 的 a, b 或 a 的范围。先将式 (1) ~ (4) 中的量词 a, b 变为自由变量,然后将这些公式化为前束范式,其中式 (1) ~ (4) 分别对应前束范式 (5) ~ (8),结果如下:

$$\exists p. \forall x. [\varphi_1(a, b, p) \wedge (\varphi_1(a, b, x) \Rightarrow (Bx > 0 \wedge \varphi_1(a, b, Ax)))] \quad (5)$$

$$\exists p. \forall x. [\varphi_2(a, b, p) \wedge (\varphi_2(a, b, x) \Rightarrow (Bx > 0 \wedge \varphi_2(a, b, Ax)))] \quad (6)$$

$$\exists p. \forall x. [\varphi_3(a, b, p) \wedge (\varphi_3(a, b, x) \Rightarrow (Bx > 0 \wedge \varphi_3(a, b, Ax)))] \quad (7)$$

$$\exists p. \forall x. [\varphi_4(a, p) \wedge (\varphi_4(a, x) \Rightarrow \varphi_4(a, Ax))] \quad (8)$$

随后通过对式 (5) ~ (8) 进行量词消去,可以得到一组关于 a, b 或仅关于 a 的约束条件,记为 $\varphi_j(a, b)$ $j \in \{5, 6, 7\}$ 或 $\varphi_8(a)$ 。显然,满足限制条件 $\varphi_j(a, b)$ 或 $\varphi_8(a)$ 的 (a^*, b^*) 或 a^* 可以使定理 1 中对应式 (1) ~ (4) 成立,并通过 $\varphi_i(a^*, b^*, x)$ 或 $\varphi_4(a^*, x)$ 描述所有位于 Ω 内的 A -不变扇形或 A -不变射线,其中自然也包含集合 NT 。

1.2 带初始输入的 2 维齐次线性循环的终止性

将给出构造 L2 循环 NT 集合的方法,并在此基础上判定循环 L2 的终止性。

为方便叙述,先令集合 $\Phi_{ab} = \{(a, b) : \varphi_5(a, b) \vee \varphi_6(a, b) \vee \varphi_7(a, b)\}$,再令 $\Phi_a = \{a : \varphi_8(a)\}$,那么通过对 1.1 节中的式 (5) ~ (8) 进行量词消去,对于循环 L2 的 NT 集分析可得:

1) 如果 $\Phi_{ab} = \emptyset \wedge \Phi_a = \emptyset$,即不存在 a, b 或 a 满足式 (1) ~ (4),那么 $NT = \emptyset$ 。这就意味着对于所有初始输入,循环 L2 都将终止。

2) 如果 $\Phi_{ab} = \emptyset \wedge \Phi_a \neq \emptyset$,即式 (4) 为真,那么显然 NT 在 \mathbb{R}^2 中表示为一条从原点发出的射线。不妨取 Φ_a 中任意一个元素记为 a^* ,那么 $NT = \varphi_4(a^*, x)$,即 $NT = \{x \in \mathbb{R}^2 : a^*x = 0, Bx > 0\}$ 。

3) 如果 $\Phi_{ab} \neq \emptyset$,即量词公式 (1) \vee (2) \vee (3) 为真,即 NT 集合在 \mathbb{R}^2 中为一个扇形,故无需对式 (4) 再进行验证。通过引理 1,可知 NT 即为所有扇形 $\varphi_i(a^*, b^*, x)$ ($(a^*, b^*) \in \Phi_{ab}$) 中,具有最

大圆心角的一个。

通过上述分析,易知当 $\Phi_{ab} = \emptyset \wedge \Phi_a \neq \emptyset$,即 NT 仅为一条射线时,可轻易地构造出集合 NT ,即 $NT = \varphi_4(a, x), \forall a \in \Phi_a$ 。而当 $\Phi_{ab} \neq \emptyset$ 时,即 NT 为扇形,集合 NT 的构造可转换为一类非线性优化问题。定理 2 表明了当 $\Phi_{ab} \neq \emptyset$ 时,如何从集合 Φ_{ab} 中找出恰当的 a^*, b^* 使得对应的扇形 $\varphi_i(a^*, b^*, x)$ 为 Ω 中最大的 A -不变集 NT 。首先,令 $\theta_{a, b}$ 为扇形 2 条边界的法向量 a, b 的夹角,那么定理 2 如下:

定理 2 记号同上。对循环 L2,若 $\Phi_{ab} \neq \emptyset$,那么必有 $(a^*, b^*) \in \Phi_{ab}$,且对于 $\forall (a, b) \in \Phi_{ab}$ 都有 $\theta_{a^*, b^*} \leq \theta_{a, b}$,使得 NT 为 $\varphi_i(a^*, b^*, x)$ 中的一个 $i \in \{1, 2, 3\}$ 。

证明:已知 $\Phi_{ab} = \{(a, b) : \varphi_5(a, b) \vee \varphi_6(a, b) \vee \varphi_7(a, b)\} \neq \emptyset$,即式 (1) ~ (3) 中至少有一个为真,那么集合 NT 在 \mathbb{R}^2 中呈现扇形,且该扇形内所有点关于 A -不变。通过 1.1 节易知满足限制条件 $\varphi_j(a, b)$ $j \in \{5, 6, 7\}$ 的 (a^*, b^*) 可通过对应的 $\varphi_i(a^*, b^*, x)$ $i \in \{1, 2, 3\}$ 描述所有位于 Ω 内的 A -不变扇形,其中自然也包含扇形 NT 。因此必存在 $(a^*, b^*) \in \Phi_{ab}$ 使得 NT 为 $\varphi_i(a^*, b^*, x)$ 中的一个。又因 $(a, b) \in \Phi_{ab}$,故 $\theta_{a, b}$ 为 Ω 中任意一 A -不变扇形 $\varphi_i(a, b, x)$ 的边界法向量 a, b 所形成的夹角,那么 $\pi - \theta_{a, b}$ 即为 A -不变扇形的圆心角,记为 β ,即 $\beta = \pi - \theta_{a, b}$ (如图 1 所示)。

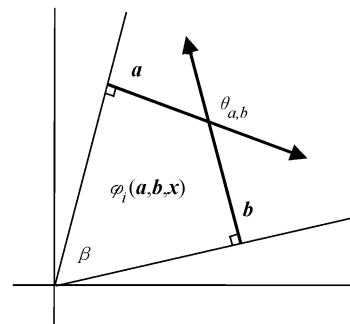


图 1 A -不变扇形 $\varphi_i(a, b, x)$ 圆心角 β 及其边界法向量 a, b 夹角 $\theta_{a, b}$

Fig.1 Central angle β of $\varphi_i(a, b, x)$ and the angle $\theta_{a, b}$ between $\varphi_i(a, b, x)$'s normal vectors a, b

已知 $0 \leq \beta \leq \pi$,那么显然当 $\theta_{a, b}$ 越小时, A -不变扇形的圆心角 $\pi - \theta_{a, b}$ 越大。从而使得该 A -不变扇形的区域越大,即该 A -不变扇形所对应的 A -不变集合 $\varphi_i(a, b, x)$ 越大。这也就是说,当 $(a^*, b^*) \in \Phi_{ab}$ 并且对于 $\forall (a, b) \in \Phi_{ab}$ 都有 $\theta_{a^*, b^*} \leq \theta_{a, b}$ 时, (a^*, b^*) 对应的 A -不变集 $\varphi_i(a^*, b^*, x)$ 最大。那么通过引理 1,便可知 NT 为 $\varphi_i(a^*, b^*, x)$ 中

的一个 $i \in \{1, 2, 3\}$ 。

定理 2 只给出了构造 Ω 中面积最大 A -不变扇形边界法线 (a^*, b^*) 的条件,并未确定 NT 为 3 种扇形(不含边界、含 1 条边界、含 2 条边界)中的哪个,即 $\varphi_i(a^*, b^*, x)$ 中的哪个。通过 1.1 节结尾处分析可知,满足限制条件 $\varphi_5(a, b) \sim \varphi_7(a, b)$ 的 a, b 只能通过对应的 $\varphi_1(a, b, x) - \varphi_3(a, b, x)$ 来描述 3 种扇形,故可以通过依次验证满足定理 2 条件的 a^*, b^* 满足 $\varphi_j(a, b) j \in \{5, 6, 7\}$ 中的哪一个,来决定 $NT = \varphi_i(a^*, b^*, x)$ 中 i 的值。即若 a^*, b^* 满足 $\varphi_5(a, b)$,那么 $NT = \varphi_1(a^*, b^*, x)$,即 NT 为一个不含 2 条边界的扇形。若 a^*, b^* 满足 $\varphi_5(a, b) - \varphi_7(a, b)$ 中 2 个及以上,那么依据不含 2 条边界扇形中的点一定少于仅含 1 条边界的扇形,而仅含 1 条边界扇形中的点又必定少于含有 2 条边界的扇形,即按集合大小顺序 $\varphi_1(a^*, b^*, x) < \varphi_2(a^*, b^*, x) < \varphi_3(a^*, b^*, x)$,选择其中最大的集合即可。例如若 a^*, b^* 分别满足 $\varphi_5(a, b), \varphi_6(a, b)$,那么 $NT = \varphi_2(a^*, b^*, x)$ 。

因 $0 \leq \theta_{a, b} \leq \pi$,且显然 $\cos(\theta_{a, b})$ 在区间 $[0, \pi]$ 上是单调递减的,故 $\text{Min } \theta_{a, b} = \text{Max } \cos(\theta_{a, b})$ 。此外,根据向量夹角公式 $\cos(\theta_{a, b}) = a \cdot b / (|a| |b|)$,知 $\text{Max } \cos(\theta_{a, b}) = \text{Max } a \cdot b / (|a| |b|)$ 。那么通过定理 2 可将寻找 2 维线性齐次循环的 NT 集转换为下列非线性优化求解问题。即求解 a, b :

$$\text{Min } \theta_{a, b} = \text{Max } \cos(\theta_{a, b}) = \text{Max } \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

s. t. $(a, b) \in \Phi_{ab}$ 。

其中, $\Phi_{ab} = \{(a, b) : \varphi_5(a, b) \vee \varphi_6(a, b) \vee \varphi_7(a, b)\}$ 。

到此,对任意给出的 IL2 循环,已能通过求解相应的优化问题构造出该循环对应的集合 NT 。那么判定 IL2 循环的终止性就变得十分容易,只需验证该循环初始输入是否位于已求得的 NT 即可。下面将给出算法 TIL2 用来判定循环 IL2 的终止性。仍记 $\Phi_{ab} = \{(a, b) : \varphi_5(a, b) \vee \varphi_6(a, b) \vee \varphi_7(a, b)\}$, $\Phi_a = \{a : \varphi_8(a)\}$ 。

算法(TIL2):

输入: 给定循环 IL2 中循环条件、赋值矩阵 B, A 及循环初始输入 x_0 。

输出: 终止或非终止。

S1: 将 B, A 带入 1.1 节式(5) ~ (8) 中,通过量词消去,得到与 4 种 NT 集分布存在分别等价的限制

条件 $\varphi_j(a, b)$ 及 $\varphi_8(a) j \in \{5, 6, 7\}$ 。继续下一步。

S2: 参照 1.2 节中分析,若 $\Phi_{ab} = \emptyset \wedge \Phi_a = \emptyset$,则输出终止并停机;若 $\Phi_{ab} = \emptyset \wedge \Phi_a \neq \emptyset$ 则任取 $a^* \in \Phi_a, NT = \{x \in \mathbb{R}^2 : a^* x = 0, Bx > 0\}$,若 $x_0 \in NT$,则输出非终止并停机;否则输出终止并停机;若 $\Phi_{ab} \neq \emptyset$,则继续下一步。

S3: 在集合 Φ_{ab} 中找出使目标函数 $a \cdot b / (|a| |b|)$ 取得最大值的 (a^*, b^*) 。若 (a^*, b^*) 满足限制条件 $\varphi_7(a, b)$,则 $NT = \varphi_3(a^*, b^*, x)$;若 (a^*, b^*) 不满足 $\varphi_7(a, b)$,但满足限制条件 $\varphi_6(a, b)$,则 $NT = \varphi_2(a^*, b^*, x)$;若 (a^*, b^*) 仅满足限制条件 $\varphi_5(a, b)$,则 $NT = \varphi_1(a^*, b^*, x)$ 。继续下一步。

S4: 通过 S3 可得循环 IL2 的 NT 集,验证若循环初始输入 $x_0 \in NT$,则输出非终止并停机。反之,若 $x_0 \notin NT$ 则输出终止并停机。

算法结束。

2 实验

将通过下述例子来阐述判定循环 IL2 终止性的方法。

例 1 判断下述带初始输入的循环 Q1 是否终止。

$$Q1: x := 7, y := 4; \text{while}(7x - y > 0 \wedge 2y - x > 0) \\ \{x := 2x + y; y := 4x + 2y\}。$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}。$$

按算法 TIL2 步骤 S1,将矩阵 A, B 带入 1.1 节式(5) ~ (8) 中,通过量词消去工具 QEPCAD^[19],进行量词消去后,可得到 $\varphi_5(a, b) - \varphi_7(a, b)$ 分别为:

$$\begin{aligned} \varphi_5(a, b) &= 2a_2 + a_1 > 0 \wedge 2b_2 + b_1 > 0 \wedge \\ & \quad [[7a_2 + a_1 \leq 0 \wedge b_2 + 2b_1 \leq 0] \vee \\ & \quad [a_2 + 2a_1 \leq 0 \wedge 7b_2 + b_1 \leq 0]], \\ \varphi_6(a, b) &= 2a_2 + a_1 \geq 0 \wedge 7a_2 + a_1 \neq 0 \wedge a_2 + 2a_1 \neq 0 \wedge \\ & \quad 2b_2 + b_1 > 0 \wedge [[7a_2 + a_1 < 0 \wedge b_2 + 2b_1 \leq 0] \vee \\ & \quad [a_2 + 2a_1 < 0 \wedge 7b_2 + b_1 \leq 0]], \\ \varphi_7(a, b) &= 2a_2 + a_1 \geq 0 \wedge 7a_2 + a_1 \neq 0 \wedge a_2 + 2a_1 \neq 0 \wedge \\ & \quad 2b_2 + b_1 \geq 0 \wedge 7b_2 + b_1 \neq 0 \wedge b_2 + 2b_1 \neq 0 \wedge \\ & \quad [[2a_2 + a_1 > 0 \wedge 7a_2 + a_1 < 0 \wedge b_2 + 2b_1 < 0] \vee \\ & \quad [2a_2 + a_1 > 0 \wedge a_2 + 2a_1 < 0 \wedge 7b_2 + b_1 < 0] \vee \\ & \quad [7a_2 + a_1 < 0 \wedge b_2 + 2b_1 > 0 \wedge b_2 + 2b_1 < 0] \vee \\ & \quad [a_2 + 2a_1 < 0 \wedge 2b_2 + b_1 > 0 \wedge 7b_2 + b_1 < 0]]。 \end{aligned}$$

步骤 S2,显然 $\Phi_{ab} \neq \emptyset$ 。

步骤 S3,找出使目标函数 $a \cdot b / (|a| |b|)$,即 $(a_1 b_1 + a_2 b_2) / \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}$,在 $\Phi_{ab} = \{(a, b) : \varphi_5(a, b) \vee \varphi_6(a, b) \vee \varphi_7(a, b)\}$ 中取得最大值的 a^*, b^* (同样是使 Ω 中 A - 不变扇形的边界法线夹角 $\theta_{a,b}$ 最小的向量 a^*, b^*)。

通过无量词简化工具 SLFQ^[20],对循环 Q1 的 $\varphi_5(a, b) \vee \varphi_6(a, b) \vee \varphi_7(a, b)$ 进行化简,可得约束条件 $p \vee q$ 。其中,

p 代表约束:

$$[b_1 + 2b_2 \geq 0 \wedge 2b_1 + b_2 \leq 0 \wedge a_1 + 2a_2 \geq 0 \wedge a_1 + 7a_2 \leq 0]$$

q 代表约束:

$$[b_1 + 2b_2 \geq 0 \wedge b_1 + 7b_2 \leq 0 \wedge a_1 + 2a_2 \geq 0 \wedge 2a_1 + a_2 \leq 0]$$

在 \mathbb{R}^2 中,上述约束条件所表示的集合区域 Φ_{ab} 如图 2 所示。

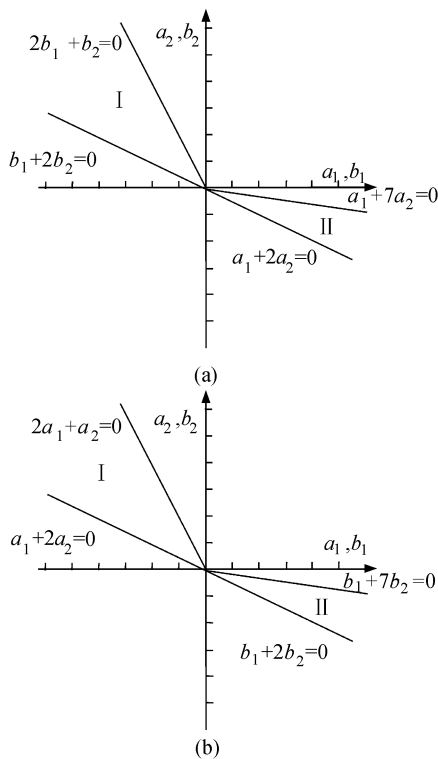


图 2 约束条件 p, q 在 \mathbb{R}^2 中表示的集合区域

Fig.2 Region described by the constrains p, q

从图 2 可以得知,(a) 中 I 表示区域: $b_1 + 2b_2 \geq 0 \wedge 2b_1 + b_2 \leq 0$, II 表示区域: $a_1 + 2a_2 \geq 0 \wedge a_1 + 7a_2 \leq 0$ 。(b) 中 I 表示区域: $a_1 + 2a_2 \geq 0 \wedge 2a_1 + a_2 \leq 0$, II 表示区域: $b_1 + 2b_2 \geq 0 \wedge b_1 + 7b_2 \leq 0$ 。

对于图 2(a),可明显看出 $2b_1 + b_2 = 0$ $a_1 + 7a_2$

= 0 的解向量 a^*, b^* 之间的夹角最小。那么分别取区域 I、II 中该等式的 1 组解 R1 为: $a^* = \{7, -1\}$ $b^* = \{-1, 2\}$ 。对于图 2(b),同样能明显看出 $2a_1 + a_2 = 0$ $b_1 + 7b_2 = 0$ 的解向量之间的夹角最小。分别取区域 I、II 中该等式的 1 组解 R2 为: $a^* = \{-1, 2\}$ $b^* = \{7, -1\}$ 。显然 R1 解向量之间的夹角与 R2 解向量的夹角相等,故可知解向量 R1 或 R2 使目标函数 $a \cdot b / (|a| |b|)$ 取得最大值。且 R1、R2 仅满足限制条件 $\varphi_5(a, b)$,不满足 $\varphi_6(a, b)$ 、 $\varphi_7(a, b)$,这既是说明取 R1、R2 中任意一个带入 $\varphi_1(a, b, x)$ 即可,故可知 Q1 循环的 NT 集如下:
 $NT = \{(x, y) \in \mathbb{R} : -x + 2y > 0 \wedge 7x - y > 0\}$ 。

步骤 S4,只需将初始输入 $x:=7, y:=4$ 带入 NT 集进行验证即可。显然 $(7, 4) \in NT$,故循环 Q1 不终止。在此例中,循环 Q1 的 $NT = \Omega$,这既是说所有满足 Q1 循环条件的初始输入都使该循环不终止。

此例中通过化简约束条件 $\varphi_5(a, b) \vee \varphi_6(a, b) \vee \varphi_7(a, b)$ 都为线性的,故仅仅通过作图便可以找出夹角最小的 a^*, b^* 从而构造出集合 NT。对于其它具有复杂约束条件的循环 L2,仍可以借助其他优化工具求解上述优化问题。

3 结 论

研究了带有初始输入循环 L2 的终止性问题,并给出了判定其终止性的完备算法。根据 NT 集是 Ω 中最大的 A - 不变子集这一重要性质,将构造 L2 循环 NT 集合的问题转换为求解目标函数最大值的优化问题,并给出了该优化问题的数学模型。进一步,通过 L2 的 NT 集合构造,不仅能判定 L2 的终止性问题,而且对带有初始输入的循环 L2 的终止性问题也能完备地判定。在未来的工作中,将进一步探索具有初始输入的非线性循环终止性问题。

参考文献:

[1] Cook B. Principles of program termination [M]//Broy M, Sitou W, Hoare T. Engineering Methods and Tools for Software Safety and Security: Volume 22 NATO Science for Peace and Security Series-D: Information and Communication Security. Amsterdam: IOS Press, 2009: 161 - 175.

[2] 杨路,夏壁灿. 不等式机器证明与自动发现 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[3] Dams D, Gerth R, Grumberg O. A heuristic for the automatic generation of ranking functions [C]//Proceedings of

- Workshop on Advances in Verification. Chicago: University of Utah Press 2000: 1 – 8.
- [4] Colón M A , Sipma H B. Synthesis of linear ranking functions [C]//Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems. Berlin: Springer 2001: 67 – 81.
- [5] Colón M A , Sipma H B. Practical methods for proving program termination [C]//Computer Aided Verification. Berlin: Springer 2002: 442 – 454.
- [6] Podelski A , Rybalchenko A. A complete method for the synthesis of linear ranking functions [C]//Verification , Model Checking , and Abstract Interpretation. Berlin: Springer 2004: 239 – 251.
- [7] Chen Yinghua , Xia Bican , Yang Lu , et al. Discovering nonlinear ranking functions by solving semi-algebraic systems [C]//Theoretical Aspects of Computing—ICTAC 2007. Berlin: Springer 2007: 34 – 49.
- [8] Cousot P. Proving program invariance and termination by parametric abstraction , lagrangian relaxation and semidefinite programming [C]//Verification , Model Checking , and Abstract Interpretation. Berlin: Springer 2005: 1 – 24.
- [9] Tiwari A. Termination of linear programs [C]//Computer Aided Verification. Berlin: Springer 2004: 70 – 82.
- [10] Braverman M. Termination of integer linear programs [C]//Computer Aided Verification. Berlin: Springer 2006: 372 – 385.
- [11] Xia Bican , Yang Lu , Zhan Naijun , et al. Symbolic decision procedure for termination of linear programs [J]. Formal Aspects of Computing 2011 23(2) : 171 – 190.
- [12] Xia Bican , Zhang Zhihai. Termination of linear programs with nonlinear constraints [J]. Journal of Symbolic Computation 2010 45(11) : 1234 – 1249.
- [13] Chen Jingmin. Termination analysis of nonlinear loops and linear loops in R^m [J]. Journal of Sichuan University: Engineering Science Edition 2013 45(2) : 110 – 116. [陈敬敏. 非线性循环及 R^m 上线性循环的终止性判定 [J]. 四川大学学报: 工程科学版 2013 45(2) : 110 – 116.]
- [14] Bradley A R , Manna Z , Sipma H B. Termination of polynomial programs [C]//Verification , Model Checking , and Abstract Interpretation. Berlin: Springer 2005: 113 – 129.
- [15] Li Yi. Termination analysis of linear loop programs [J]. Journal of Systems Science and Mathematical Science , 2013 33(5) : 626 – 638. [李轶. 线性循环程序的终止性判定 [J]. 系统科学与数学 2013 33(5) : 626 – 638.]
- [16] Cook B , Podelski A , Rybalchenko A. Abstraction refinement for termination [C]//Static Analysis. Berlin: Springer 2005: 87 – 101.
- [17] Cook B , Podelski A , Rybalchenko A. Termination proofs for systems code [C]//ACM SIGPLAN Notices. New York: ACM 2006 41(6) : 415 – 426.
- [18] Babi D , Cook B , Hu A J , et al. Proving termination of nonlinear command sequences [J]. Formal Aspects of Computing 2013 25(3) : 389 – 403.
- [19] Ben-Amram A M. A complexity tradeoff in ranking-function termination proofs [J]. Acta Informatica 2009 46(1) : 57 – 72.
- [20] Brown C W. QEPCAD B: A program for computing with semi-algebraic sets using CADs [J]. ACM SIGSAM Bulletin 2003 37(4) : 97 – 108.

(编辑 杨 蓓)